GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

SESSION 1987 (Option T)

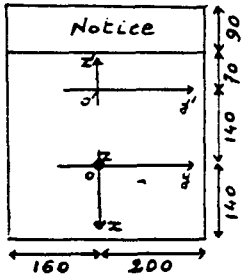
Durée : 3 h 30

ENSAM

L'épreuve comporte une épure sur feuille quadrillée 360 x 440, avec une courte notice (questions III-2° et IV-1°) rédigée à l'emplacement indiqué ; et des démonstrations faites sur une feuille normale (question I-1°, II-1° et 2° ; III-4°).

Les candidats remettront obligatoirement une feuille de chaque sorte.

Le tracé de l'épure sera fait en trait fin rouge continu (sauf IV-2°) et comportera les lignes de rappel. L'espace est rapporté au trièdre orthonormé direct Oxyz, qui se projette comme indiqué ci-contre sur les deux plans de projections ; cotes en millimètres.



Des points auxiliaires, clairement repérés sur l'épure, pourront être utilisés dans la notice.

Les démonstrations devront être justifiées sans référence au tracé de l'épure, en faisant, si nécessaire, de petites figures. Les calculs seront brefs et devront être limités à une feuille (4 pages). Il ne sera tenu aucun compte de toute rédaction faite sur une seconde feuille.

Pour l'épure on prendra p = 60.

I - Le point S a pour coordonnées : 0, 0, p ($p > 0$). On considère la surface conique de sommet S et dont une directrice est la courbe d'équations $z = 0$; $x^2 = p(p + 2y)$

1° (Sur feuille)
Déterminer une équation cartésienne de cette surface.

2° Représenter par les projections de ses contours apparents la partie de cette surface comprise entre les plans $z = 0$ et $z = p$, et limitée au plan $y = 2p$. Dans toute la suite on désignera par C la surface conique ainsi limitée.

Représenter la section de C par le plan $z = p/2$. On construira les points d'ordonnées 0 et 2p et les tangentes en ces points.

II - 1° (Sur feuille)
On considère les deux familles de courbes d'équations respectives $x^2 = a(a + 2y)$; $z = 0$ et $x^2 = b(b - 2y)$; $z = 0$.
a et b décrivant $\mathbb{R}^+$.

Préciser quelle transformation simple permet de passer d'une courbe d'une famille à une autre courbe de la même famille ; ou de l'autre famille ?

Quelle remarque peut-on faire sur le foyer, le sommet de chacune de ces paraboles ? Montrer que ces deux familles sont orthogonales.

2° (Sur feuille)
On désigne par L_b les courbes intersections de C par les surfaces cylindriques d'équation $x^2 = b(b - 2y)$. b décrivant $\mathbb{R}^+$.

Que représentent ces courbes L_b pour la surface C ?

Démontrer que ces courbes sont planes ; en déduire leur nature.

3° Tracer les projections des courbes L_b pour $b = p$ et pour $b = 2p$. On construira les points de cotes extrêmes et les tangentes en ces points.

Représenter, sur la gauche de l'épure principale, la vraie grandeur de la courbe L_p avec ses points et tangentes précédentes.

III - On désigne par E_m les courbes, intersections de C par les plans de bout d'équation $z = m(y + \frac{p}{2})$; m décrivant $]0, 2[$.

1° Tracer les projections de E_1 ($m = 1$) ; celles de E_m pour $m = 0{,}4$. Sur cette projection horizontale de E_m on indiquera les sommets, le point d'ordonnée nulle et la tangente en ce point.

2° (Notice)
Déduire, des constructions de ce tracé, que la projection horizontale de E_m, $m \neq 1$, admet 0 pour foyer.

3° Soit I le point de coordonnées : $2p, \frac{3p}{2}, 0$. Faire un rabattement du plan tangent à C en I sur le plan horizontal de projection. On fera figurer le rabattement des tangentes aux différentes sections tracées précédemment, et situées dans ce plan.

4° (sur feuille)
Généralisation du 2°. Ecrire l'équation polaire (axe polaire $\overrightarrow{Ox}$) de la courbe $x^2 = p(p + 2y)$ et, en coordonnées cylindriques, sous la forme $Z = f(r, \theta)$, l'équation de la surface conique définie au I.1°. En déduire que la projection horizontale de toute section plane de cette surface admet 0 pour foyer (sauf si le plan passe par S).

IV - Soit U la surface cylindrique, quart d'une surface de révolution, d'axe de bout, d'équation $(y - p)^2 + (Z - p)^2 = p^2$ avec $Z < p$ et $y > p$.

1° Tracer les projections de l'intersection des surfaces U et C. On construira les points de cote égale à p/2 et le point situé sur la droite SI, ainsi que les tangentes en ces points (notice).

2° Représenter en trait moyen noir le solide formé des points situés à l'intérieur de C et à gauche de U ; et en trait fin noir, les projections des lignes tracées sur C.